Colle du 29/04 - Sujet 1
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer le théorème du rang sans les cas particuliers où $n = 0$ ou $p = 0$.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$ Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $F = \left\{ g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)} \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que F est isomorphe à $\mathscr{L}(E, \mathrm{Ker}(f))$.

Colle de mathématiques PTSI 2023-2024

Colle du 29/04 - Sujet 2
Applications linéaires

Question de cours. Montrer que l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.

Exercice 1. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ -5x+4y+z \end{bmatrix} \end{array}.$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le noyau de φ.
3. Calculer l'image de φ.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.
2. Montrer que si E est de dimension finie alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathscr{B}$, la famille $\left(u, f^2(u)\right)$ est liée.

Colle de mathématiques PTSI 2023-2024

Colle du 29/04 - Sujet 3
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ p) = \mathrm{Ker}(p) \oplus (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(p))$.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Montrer que f est une homothétie.